



时变信道下线性网络分批稀疏码秩分布研究

王士恒^{1,2}, 刘恒^{1,2}, 唐林³, 苏金领^{1,2}, 张瑞琦^{1,2}

- (1. 西南交通大学信息编码与传输省重点实验室, 四川 成都 611756;
2. 现代交通通信与传感网络国家级国际联合研究中心, 四川 成都 611756;
3. 中国电子科技集团第三十研究所, 四川 成都 610031)

摘要: 作为一种应用于多跳网络的低复杂度两步式编码技术, 分批稀疏 (batched sparse, BATS) 码的传输性能与传输矩阵的秩分布直接相关。现有文献在假设各链路丢包率均为常数的前提下, 研究了分批稀疏码在纠删信道下的秩分布。然而, 在一些场景 (如工业互联网), 大量的移动节点部署在整个网络中, 可能导致节点之间的信道变成时变信道, 即链路上的丢包率随时间变化而变化。因此在假定网络中各节点之间链路丢包率随机变化的场景下, 研究了随机线性网络编码 (random linear network coding, RLNC) 和系统重编码作为内码编码方案时, 分批稀疏码传输矩阵的秩分布, 推导了链路丢包率服从有限区间正态分布情况下归一化秩期望的闭合解, 并通过蒙特卡洛仿真验证了该闭合解的正确性。

关键词: 分批稀疏码; 随机线性网络编码; 系统重编码; 秩分布; 时变信道

中图分类号: TN911

文献标志码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2022096

Analysis for rank distribution of BATS codes under time-variant channels

WANG Shiheng^{1,2}, LIU Heng^{1,2}, TANG Lin³, SU Jinling^{1,2}, ZHANG Ruiqi^{1,2}

1. Key Laboratory of Information Coding and Transmission, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China
2. Communication and Sensor Network for Modern Transportation International Cooperation Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China
3. The 30th Research Institute of China Electronics Technology Corporation, Chengdu 610031, China

Abstract: As a two-step coding technique applied in multi-hop networks with a low complexity, the transmission performance of batched sparse (BATS) code was directly related to the rank distribution of the transfer matrix. Based on the assumption that the packet loss rate of each link on the erasure channel was constant, the rank distribution of the batch sparse codes on the erasure correction channel had been widely studied. However, in some scenarios such as the industrial Internet, a large number of mobile nodes were deployed in the whole network, which may cause the channels among nodes to become time-varying, that was, the packet loss rate on the link may vary with time. Therefore, under the assumption that the link packet loss rate between nodes in the network changes randomly, the rank

收稿日期: 2021-10-11; 修回日期: 2022-05-15

基金项目: 四川省科技计划项目 (No.2020YFH0111)

Foundation Item: Sichuan Science and Technology Program (No.2020YFH0111)

distribution of batched sparse code transmission matrix was studied when random linear network coding (RLNC) and system recoding were used as inner coding schemes, and the closed solution of normalized rank expectation was deduced when the link packet loss rate obeyed the finite interval normal distribution. The correctness of the closed solutions was verified by Monte Carlo simulation.

Key words: BATS code, random linear network coding, system recoding, rank distribution, time-variant channel

0 引言

在无线网络中,从源节点到宿节点之间的直接链路往往是不可达的,因此多跳的通信方式变得十分重要。在多跳通信网络中,部分节点作为网络中间节点通过逐跳转发的方式将接收的数据包传输到宿节点。由于噪声、干扰或者信道失真等影响,在多跳网络中传输的数据包仍然可能以一定概率出现丢包的现象,此时可使用网络编码^[1]处理丢包问题。

作为多跳网络中的一种新型信道编码方案,同时也是传统随机线性网络编码(random linear network coding, RLNC)^[2]的加强型方案,分批稀疏(batched sparse, BATS)码是一种能够在丢包网络中改进网络性能的编码方案^[3]。分批稀疏码提供了一个两段式编码框架,源节点处的外码(喷泉码的矩阵形式)在理论上可以生成无限数量的批次数据包(batch),而内码(采用线性网络编码)则在网络中间节点处对属于同一个批次的数据包进行再次编码。分批稀疏码适用于任何允许在中间节点上进行线性网络编码的网络。由于端到端的操作为线性编码,因此分批稀疏码对动态网络拓扑和丢包具有鲁棒性。此外,分批稀疏码可以在较小的有限域下运行,相比之下,现有的随机线性网络编码虽然可以使网络吞吐量达到网络容量^[4-5],但也需要较大的场大小去保证传输矩阵为满秩。分批稀疏码解决了基于块的方法的顺序调度的反馈问题:由于无速率的特性,批次的顺序调度不需要反馈。同时,分批稀疏码解决了基于喷泉码的方法的度分布问题,因为分批稀疏码的内码不会改变批次的度值^[3]。

与传统的随机线性网络编码相比,分批稀疏码能够显著降低编码开销和译码复杂度^[6],同时由于不再需要为每个数据包发送 ACK/NACK 反馈信息,分批稀疏码的无速率特性还能明显简化传输协议^[7]。另外,分批稀疏码在网络中间节点仅需要进行有限域运算,因此 BATS 码适用于网络中间节点存储空间有限、数据传输量巨大且对时延敏感的数据传输场景^[6]。同时,对不同的 5G 应用场景^[8],如增强型移动宽带(enhanced mobile broadband, eMBB),结合丢包率、时延等性能指标要求以及节点处理能力,也可以有针对性地设计相应的分析稀疏码传输协议。

目前,国内外诸多学者在许多方面对 BATS 码进行了研究与优化。Yang 等^[9]首先提出了一种简单的支持分批稀疏码的网络协议,称为 BATS-Pro-0,该协议由上到下将信息传输的框架分为应用层、传输层、网络层、链路层和物理层,演示了如何使用分批稀疏码在网络中进行通信,并为后续的研究提供了一个最基本的协议。

由于秩分布决定了数据传输的最大可达速率,因此秩分布是在分析分批稀疏码性能时的一个十分重要的参数,目前已有相关文献研究了分批稀疏码在不同网络拓扑和结构下的秩分布。Yang 等^[7]基于 BATS-Pro-0 协议,研究分析了 RLNC 重编码作为内码编码方案时分批稀疏码的归一化秩期望,并提出了一个批的秩在网络中的每个节点上形成一个马尔可夫链^[7],推导得到删除信道下 RLNC 重编码的最大可达速率,即在批次数足够大的情况下,该速率会收敛到一个常数,该数值只随丢包率变化。之后 Yang 等^[7]对



RLNC 重编码进行改进, 提出系统重编码作为内码编码的方案并分析其秩分布。该方案在批次数足够大的情况下与 RLNC 重编码的最大可达速率相同, 但在批次数较小时有着更明显的优势。作为一种新的编码技术, 其在计算开销和重编码时延上都要低于 RLNC 重编码, 同时在相同节点上的秩期望也更大, 因此, 以系统重编码作为分批稀疏码的内码会获得较 RLNC 重编码更优的性能。同时根据线性重编码, Yin 等^[10]提出了自适应重编码方案, Yang 等^[7]提出了一个批在下一跳上的秩期望, Yue 等^[6]在此基础上研究了两种能够应用于工业互联网上行链路的分布式分批稀疏码的秩期望。

网络编码可分为确定网络编码和随机网络编码。为了能够设计出高效的确定网络编码, 通常需要获取信道状态的相关信息^[11]。而随机线性网络编码达到较高的编码增益的代价是较高的编码开销^[12]。为了降低编码开销, 各种稀疏随机线性网络编码方案被提出^[13-16]。

Sehat 等^[17]分析了稀疏矩阵秩的概率分布, 指出稀疏网络编码的提出正是为了解决牺牲通信负载而造成的巨大计算复杂度的问题。Li 等^[18]也研究了稀疏随机线性网络编码传输矩阵非奇异的概率。此外, Li 等^[19]分析了稀疏随机线性网络编码译码失败概率, 将求解译码失败概率问题转换为随机传输矩阵秩分布问题, 而该问题同样可以通过矩阵零模式来解决, 得到秩分布的上限和下限, 进而可以得到译码失败概率。

然而上述文献的研究都基于时不变信道, 即假定各条链路上的丢包率均为常数。正如前文所述, 分批稀疏码是一种多跳信道编码机制, 该机制不仅能够应用在固定节点上, 同样也适用于移动节点。而在节点移动的场景下, 链路的丢包率将很难保持恒定不变。本文作者在文献[20]中提出了时变信道下的分批稀疏码传输模型, 讨论了网络中间节点使用 RLNC 重编码时, 分批稀疏码在

时变信道下的秩分布, 在该信道下, 各链路上的丢包率假定为随机变量而不是固定值。基于此, 本文进一步对时变信道下分批稀疏码的秩分布展开研究, 重点研究了链路丢包率服从有限区间正态分布时的秩分布且阶数 k 为任意值时, RLNC 和系统重编码的归一化秩期望的通用闭合解。

1 分批稀疏码

1.1 外码编码

分批稀疏码是随机线性网络编码的加强型方案, 该编码方案分为外部和内码两部分。外码在源节点处生成批 $\mathbf{X}_i$, 一个包含 M 个已编码数据包的批通常利用 K 个输入数据包的子集生成, 即:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{B}_i \times \mathbf{G}_i \quad (1)$$

其中, M 列矩阵 $\mathbf{G}_i$ 是第 i 个批的生成矩阵, 而 $\mathbf{B}_i$ 则是 K 个输入数据包的一个子集。令 dg_i 表示第 i 个批的度, 即批中原始数据包的个数。一般情况下, 批的度为一个随机数, 其服从的随机分布称为度分布, 度分布是在设计分批稀疏码外码时的一个十分重要的参数。

1.2 内码编码

内码编码是指在网络中间节点将接收的属于同一个批的数据包进行重编码, 将得到的编码数据包转发至下一节点。

分批稀疏码的内码通常采用随机线性网络编码的重编码方案, 该方案有较大的计算开销和重编码时延。

文献[7]提出了基于系统重编码 (systematic recoding) 的内码方案。作为一种新的编码技术, 系统重编码在计算开销和重编码时延上都要低于 RLNC 重编码, 同时在相同节点上的秩期望也更大, 因此, 以系统重编码作为分批稀疏码的内码会获得比 RLNC 重编码更优的性能。在系统重编码的内码方案中, 假设网络中间节点接收 k^* 个属于同一个批的数据包, r 是 k^* 个数据包中线性无关

数据包的数量。令 M' 表示系统重编码生成并转发至下一节点的数据包数量。系统重编码按照如下步骤进行。

步骤 1 从接收的数据包中选择 r 个线性无关的数据包作为重编码数据包的一部分。

步骤 2 从步骤 1 选择的 r 个线性无关的数据包中使用随机线性网络编码生成 $M' - r$ 个编码数据包。

链路间的丢包率可建模为对角矩阵 $\mathbf{E}$ ，其中，对角线元素为 0 的概率对应链路上的丢包率 ε 。中间节点的系统重编码矩阵为 Φ ，其中 Φ 的前 r 列构成一个单位矩阵，后 $M' - r$ 列中的元素在有限域内随机取值^[3]。因此，第 n 个节点收到的数据包 $\mathbf{Y}$ 为：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{E}_1\Phi_1\mathbf{E}_2\Phi_2\cdots\Phi_{n-1}\mathbf{E}_{n-1}\Phi_n \quad (2)$$

定义转移矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{E}_1\Phi_1\mathbf{E}_2\Phi_2\cdots\Phi_{n-1}\mathbf{E}_{n-1}\Phi_n$ ，式(2)可进一步表示为：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \times \mathbf{H} \quad (3)$$

2 时变信道下的归一化秩期望分析

2.1 时不变信道下的归一化秩分布

文献[7]讨论了在时不变信道下基于线性重编码的分批稀疏码的归一化秩分布。在一个长度为 l 的线性网络中，其中 R_0 表示源节点， R_l 表示宿节点。令 $\pi_n, n=0,1,\cdots,l$ 表示一个批在第 n 个节点处的秩分布，其是一个含 $M+1$ 个元素的向量，且一个批在节点 $R_n, n=0,1,\cdots,l$ 处的秩形成一个马尔可夫链。假设 $\mathbf{P}$ 表示重编码时该马尔可夫链的概率转移矩阵，因为数据包在传输过程中，其转移矩阵 $\mathbf{H}$ 的秩不可能增大，所以 $\mathbf{P}$ 为下三角矩阵。若所有节点使用相同的重编码方案生成 M 个数据包发送至下一节点，则：

$$\pi_n = \pi_0(\mathbf{P})^n \quad (4)$$

并有 $\pi_0[M]=1$ 。因此要计算在第 n 个节点 R_n 处的秩分布 π_n ，仅需要计算概率转移矩阵 $\mathbf{P}$ 。设

宿节点 R_l 接收 r 个数据包，则其归一化秩期望可表示为：

$$\frac{1}{M} \sum_{r=1}^M r \pi_l[r] \quad (5)$$

2.2 时变信道下的归一化秩分布

在时不变信道秩分布的基础上，对时变信道下的归一化秩分布进行分析。一个长度为 l 的线性网络中任意节点 $R_n, n=1,2,\cdots,l$ 接收到批的秩分布同样记为 π_n 。假设任意节点 R_n 接收数据包并重编码生成 M' 个数据包。定义向量 $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n]$ ，其中第 t 个元素 ε_t 表示第 t 跳链路上的丢包率。为方便分析，假定 $\varepsilon_t, t=1,2,\cdots,n$ 是服从独立同分布的连续随机变量，有着相同的概率密度分布函数 $f(\varepsilon)$ 。因此在任意节点 $R_n, n=1,2,\cdots,l$ 处秩分布 π_n 与 $\bar{\varepsilon}$ 的条件秩分布为：

$$\pi_{n|\bar{\varepsilon}} = P[\pi_n | \bar{\varepsilon}] = \pi_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdots \mathbf{P}_n \quad (6)$$

其中， $\mathbf{P}_n$ 为第 n 个节点的概率转移矩阵，其会因不同的重编码方案而有所区别。因此秩分布与 $\bar{\varepsilon}$ 的联合概率密度分布可以表示为：

$$\pi_{n,\bar{\varepsilon}} = P[\pi_n, \bar{\varepsilon}] = \pi_{n|\bar{\varepsilon}} \times f(\bar{\varepsilon}) \quad (7)$$

其中， $f(\bar{\varepsilon})$ 表示向量 $\bar{\varepsilon}$ 中所有元素的联合概率密度分布，由于 $\varepsilon_t, t=1,2,\cdots,n$ 是独立同分布的随机变量，故 $f(\bar{\varepsilon})$ 可以表示为：

$$f(\bar{\varepsilon}) = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n) \quad (8)$$

所以式 (7) 可以表示成：

$$\pi_{n,\bar{\varepsilon}} = \pi_0 \times [\mathbf{P}_1 f(\varepsilon_1)] \times [\mathbf{P}_2 f(\varepsilon_2)] \cdots [\mathbf{P}_n f(\varepsilon_n)] \quad (9)$$

因此一个批在节点 R_l 处的秩分布可以通过计算边缘概率分布得到：

$$\pi_n = \pi_0 \left[\int \mathbf{P}_1 f(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \right] \left[\int \mathbf{P}_2 f(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \right] \cdots \left[\int \mathbf{P}_n f(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \right] \quad (10)$$

假设各个节点采用相同的重编码方案，则：

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \cdots = \mathbf{P}_n = \mathbf{P} \quad (11)$$

又因为 $\varepsilon_t, t=1,2,\cdots,n$ 服从独立同分布，故有：



$$\left[\int P_1 f(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \right] \left[\int P_2 f(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \right] = \cdots = \left[\int P_n f(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \right] \quad (12)$$

式(10)可以简化为:

$$\pi_n = \pi_0 \times \left[\int P f(\varepsilon) d\varepsilon \right]^n \quad (13)$$

式(13)表明,若要计算节点 R_n 的秩,需要结合具体的重编码方案与概率密度分布函数进行分析,因此,本文将基于不同的信道条件以及不同重编码方式对线性网络中的分批稀疏码秩分布进行分析。

2.3 有限区间正态分布

在时变信道中,链路上的丢包率总是分布在有限区间,因此本文假设 ε 服从有限区间正态分布,其概率密度分布函数 $f_k(\varepsilon)$ 为:

$$f_k(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}k!} \frac{(-1)^k}{a} \left[\frac{(\varepsilon-\mu)^2}{a^2} - 1 \right]^k, \mu-a \leq \varepsilon \leq \mu+a \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

其中, k 、 a 和 μ 分别表示有限区间正态分布的阶数、有限区间半区间长度和有限区间的均值。有限区间正态分布概率密度函数如图 1 所示,可见不同阶数 k 所对应的曲线。

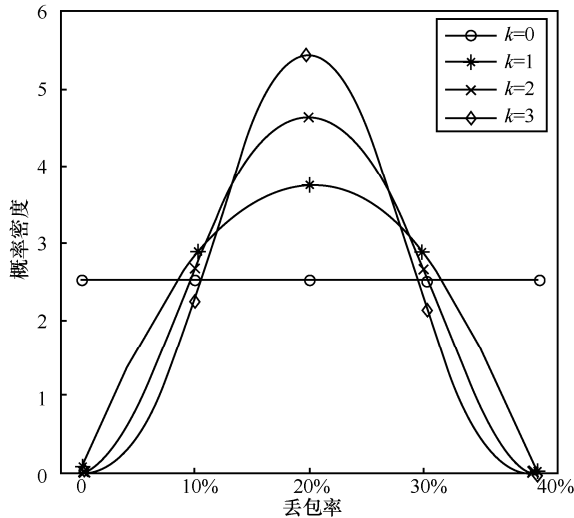


图 1 有限区间正态分布概率密度函数

当有限区间正态分布的阶数为 0 时,概率密度函数为:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2a}, \mu-a \leq \varepsilon \leq \mu+a \quad (15)$$

有限区间正态分布的阶数为 1 时,概率密度函数为:

$$f(\varepsilon) = \frac{3}{4a} - \frac{3(\varepsilon-\mu)^2}{4a^3}, \mu-a \leq \varepsilon \leq \mu+a \quad (16)$$

2.4 时变信道下 RLNC 重编码的归一化秩期望

文献[20]研究了有限区间正态分布阶数为 0 和 1 时,RLNC 重编码在时变信道下的秩分布并推导了闭合解。本节将阶数从 0 和 1 推广到更具有一般性的自然数 k ,讨论任意阶数下 RLNC 重编码在时变信道下的秩分布及其闭合解。

假设一个节点接收一个秩为 i 的批,且采用系统重编码作为内码编码方案生成 M 个编码数据包并发送到下一节点,对于 $0 \leq j \leq i \leq M$,有:

$$\begin{aligned} P[i, j] &= \sum_{r=j}^M \binom{M}{r} (1-\varepsilon)^r \varepsilon^{M-r} \zeta_j^{i,r}(q_m) = \\ &= \sum_{r=j}^M \binom{M}{r} \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} (-\varepsilon)^n \varepsilon^{M-r} \zeta_j^{i,r}(q_m) = \\ &= \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \binom{M}{j} \binom{r}{n} (-1)^n \zeta_j^{i,r}(q_m) \varepsilon^{n+M-r} = \\ &= \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times \varepsilon^{n+M-r} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{其中, } \Gamma = \binom{M}{r} \binom{r}{n} (-1)^n \zeta_j^{i,r}(q_m).$$

因此,当 $0 \leq j \leq i \leq M$ 概率转移矩阵的期望为:

$$\begin{aligned} \int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon &= \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varepsilon^{n+M-r} f(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varepsilon^{n+M-r} \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}k!} \frac{(-1)^k}{a} \left[\frac{(\varepsilon-\mu)^2}{a^2} - 1 \right]^k d\varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

对其应用两次二项式定理进行展开可得:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}k!} \frac{(-1)^k}{a} \times$$

$$\sum_{w=0}^k \binom{y}{w} \times \frac{(-1)^{k-w}}{a^{2w}} \int_{\mu-a}^{\mu+a} (\varepsilon - \mu)^{2w} \times \varepsilon^{n+M-r} d\varepsilon =$$

$$\sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1} k!} \frac{(-1)^k}{a} \times \sum_{w=0}^k \sum_{x=0}^{2w} \binom{y}{w} \binom{2w}{x} \times \quad (19)$$

$$\frac{(-1)^{k-w}}{a^{2w}} \times (-\mu)^{2w-x} \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varepsilon^{n+M-r+x} d\varepsilon$$

对丢包率 ε 积分得:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times \sum_{w=0}^k \sum_{x=0}^{2w} Z \times$$

$$\frac{(\mu+a)^{n+M-r+x+1} - (\mu-a)^{n+M-r+x+1}}{n+M-r+x+1} \quad (20)$$

$$\text{其中, } Z = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1} k!} \frac{(-1)^k}{a} \binom{y}{w} \binom{2w}{x} \frac{(-1)^{k-w}}{a^{2w}} \quad \circ$$

考虑当有限区间正态分布的阶数为 0 和 1 时这两种特殊情况, 将 $k=0$ 代入式 (19) 得:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times$$

$$\frac{(\mu+a)^{n+M-r+1} - (\mu-a)^{n+M-r+1}}{2a(n+M-r+1)} \quad (21)$$

将 $k=1$ 代入式 (19) 得:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{r=j}^M \sum_{n=0}^r \Gamma \times (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) \quad (22)$$

其中,

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{3(a^2 - \mu^2)[(\mu+a)^{n+M-r+1} - (\mu-a)^{n+M-r+1}]}{4a^3(n+M-r+1)} \\ \Phi_2 &= \frac{3\mu[(\mu+a)^{n+M-r+2} - (\mu-a)^{n+M-r+2}]}{2a^3(n+M-r+2)} \\ \Phi_3 &= \frac{-3[(\mu+a)^{n+M-r+3} - (\mu-a)^{n+M-r+3}]}{4a^3(n+M-r+3)} \end{aligned} \right. \quad \circ$$

式 (20) 和式 (21) 所示的结果与文献[20]中的一致。

2.5 时变信道下系统重编码的归一化秩期望

基于文献[20]所述的 RLNC 重编码在时变信

道下的秩分布研究思路, 本节讨论采用系统重编码作为内码时, 分批稀疏码在时变信道下的归一化秩期望, 并推导求解出 k 在任意值下, 归一化秩期望的闭合解。

假设一个节点接收一个秩为 i 的批且采用系统重编码作为内码编码方案生成 M' 个编码数据包并发送到下一节点, 对于 $0 \leq j \leq i \leq M$, 有:

$$P[i, j] =$$

$$\begin{cases} \sum_{v=j}^{M'} \sum_{b=0 \vee (v+i-M')}^j \binom{M'-i}{v-b} \binom{i}{b} (1-\varepsilon)^v \varepsilon^{M'-v} \zeta_{j-b}^{i-b, v-b}(q_m), i < M' \\ \binom{M'}{j} (1-\varepsilon)^j \varepsilon^{M'-j}, i \geq M' \end{cases} \quad (23)$$

其中, $0 \vee (v+i-M')$ 表示取两个实数的较大值。

现在考虑将系统重编码应用于分批稀疏码的内码, 对于 $0 \leq j \leq i \leq M'$ 有:

$$P[i, j] = \begin{cases} \sum_{v=j}^{M'} \sum_{b=0 \vee (v+i-M')}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \times \varepsilon^{M'+r-v}, i < M' \\ \sum_{r=0}^j \binom{M'}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \varepsilon^{M'+r-v}, i \geq M' \end{cases} \quad (24)$$

其中:

$$\Lambda = \binom{M'-i}{v-b} \binom{i}{b} \binom{v}{r} (-1)^r \zeta_{j-b}^{i-b, v-b}(q_m) \quad (25)$$

考虑 $M'=M$ 的情况, 则:

$$P[i, j] = \begin{cases} \sum_{v=j}^M \sum_{b=0 \vee (v+i-M)}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \times \varepsilon^{M+r-v}, i < M \\ \sum_{r=0}^j \binom{M}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \varepsilon^{M+r-v}, i \geq M \end{cases} \quad (26)$$

其中:

$$\Lambda = \binom{M-i}{v-b} \binom{i}{b} \binom{v}{r} (-1)^r \zeta_{j-b}^{i-b, v-b}(q_m) \quad (27)$$

因此, 概率转移矩阵的期望为:



$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} \sum_{v=j}^M \sum_{b=0}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varepsilon^{M+r-v} f(\varepsilon) d\varepsilon, \\ 0 \leq j \leq i \leq M \\ \sum_{r=0}^j \binom{M}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varepsilon^{M+r-v} f(\varepsilon) d\varepsilon, \\ 0 \leq j \leq i \leq M \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (28)$$

当 $0 \leq j \leq i < M$, 对积分中的多项式进行二项式定理展开得:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{v=j}^M \sum_{b=0}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \times \sum_{w=0}^k \sum_{x=0}^{2w} Z \times \frac{(\mu+a)^{M+r-v+x+1} - (\mu-a)^{M+r-v+x+1}}{M+r-v+x+1} \quad (29)$$

同理, 当 $0 \leq j \leq i = M$, 对可得概率转移矩阵的期望为:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} \sum_{r=0}^j \binom{M}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \times \sum_{w=0}^k \sum_{x=0}^{2w} Z \times \\ \frac{(\mu+a)^{M+r-j+x+1} - (\mu-a)^{M+r-j+x+1}}{M+r-j+x+1} \end{cases} \quad (30)$$

综上所述概率转移矩阵的期望为:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} \sum_{v=j}^M \sum_{b=0}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \times \sum_{w=0}^k \sum_{x=0}^{2w} Z \times \\ \frac{(\mu+a)^{M+r-v+x+1} - (\mu-a)^{M+r-v+x+1}}{M+r-v+x+1}, 0 \leq j \leq i < M \\ \sum_{r=0}^j \binom{M}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \times \sum_{w=0}^k \sum_{x=0}^{2w} Z \times \\ \frac{(\mu+a)^{M+r-j+x+1} - (\mu-a)^{M+r-j+x+1}}{M+r-j+x+1}, 0 \leq j \leq i = M \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{其中, } Z = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1} k!} \frac{(-1)^k}{a} \binom{y}{w} \binom{2w}{x} \frac{(-1)^{k-w}}{a^{2w}}.$$

当有限区间正态分布的阶数为 0 时, 将 $k=0$ 代入式 (30), 有:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} \sum_{v=j}^M \sum_{b=0}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \times \Pi, 0 \leq j \leq i < M \\ \sum_{r=0}^j \binom{M}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \times \Sigma, 0 \leq j \leq i = M \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (31)$$

其中:

$$\Pi = \frac{1}{2a(M+r-v+1)} [(\mu+a)^{M+r-v+1} - (\mu-a)^{M+r-v+1}] \quad (32)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2a(M+r-j+1)} [(\mu+a)^{M+r-j+1} - (\mu-a)^{M+r-j+1}]$$

当有限区间正态分布的阶数为 1 时, 将 $k=1$ 代入式 (30), 有:

$$\int P[i, j] f(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} \sum_{v=j}^M \sum_{b=0}^j \sum_{r=0}^v \Lambda \times (A_1 + A_2 + A_3), 0 \leq j \leq i < M \\ \sum_{r=0}^j \binom{M}{j} \binom{j}{r} (-1)^r \times (B_1 + B_2 + B_3), 0 \leq j \leq i = M \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{其中, } \begin{cases} A_1 = \frac{3(a^2 - \mu^2)[(\mu+a)^{M+r-v+1} - (\mu-a)^{M+r-v+1}]}{4a^3(M+r-v+1)} \\ A_2 = \frac{-3[(\mu+a)^{M+r-v+3} - (\mu-a)^{M+r-v+3}]}{4a^3(M+r-v+3)} \\ A_3 = \frac{3\mu[(\mu+a)^{M+r-v+2} - (\mu-a)^{M+r-v+2}]}{2a^3(M+r-v+2)} \end{cases} \quad \text{且}$$

$$\begin{cases} B_1 = \frac{3(a^2 - \mu^2)[(\mu+a)^{M+r-j+1} - (\mu-a)^{M+r-j+1}]}{4a^3(M+r-j+1)} \\ B_2 = \frac{-3[(\mu+a)^{M+r-j+3} - (\mu-a)^{M+r-j+3}]}{4a^3(M+r-j+3)} \\ B_3 = \frac{3\mu[(\mu+a)^{M+r-j+2} - (\mu-a)^{M+r-j+2}]}{2a^3(M+r-j+2)} \end{cases}.$$

3 仿真结果与分析

本节基于蒙特卡洛仿真对以上结论的数值分析的结论进行验证, 数值计算与仿真参数见表 1。

表 1 数值计算与仿真参数

参数	描述	取值
μ	有限区间分布的均值	0.2
a	有限区间分布的半区间长度	0.13
k	有限区间正态分布阶数	0, 1, 2, 3
q_m	基域	2, 256
M	批大小	8, 16, 32

图 2~图 5 分别是有限区间正态分布的阶数为 0、1、2 和 3 时基于系统重编码的分批稀疏码归一化秩期望仿真结果。可以看出, 随着网络长度的增加, 归一化秩期望逐渐减小, 且数值分析结果与蒙特卡洛仿真结果完全吻合。此外, 对比图 2~图 5 可以发现, 当基域 q_m 、批大小 M 和网络长度 L 相同时, 有限区间正态分布阶数越大, 系统重编码的归一化秩期望越大。如当 $q_m=256$ 、 $M=32$ 、 $L=20$ 时, $k=3$ 对应的重编码方案具有更高的归一化秩期望。

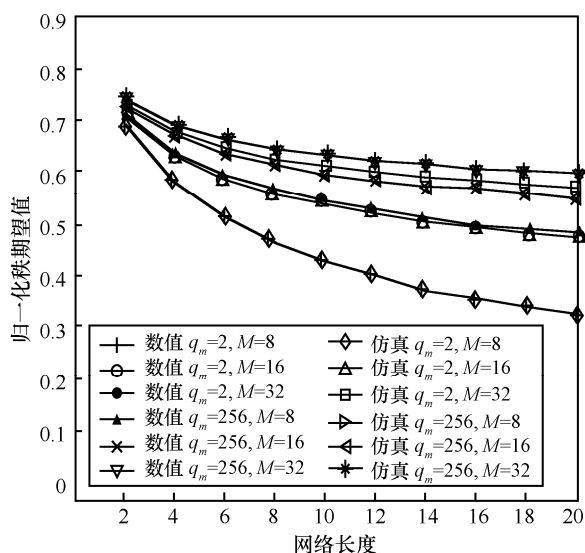


图 2 $k=0$ 时基于系统重编码的分批稀疏码归一化秩期望

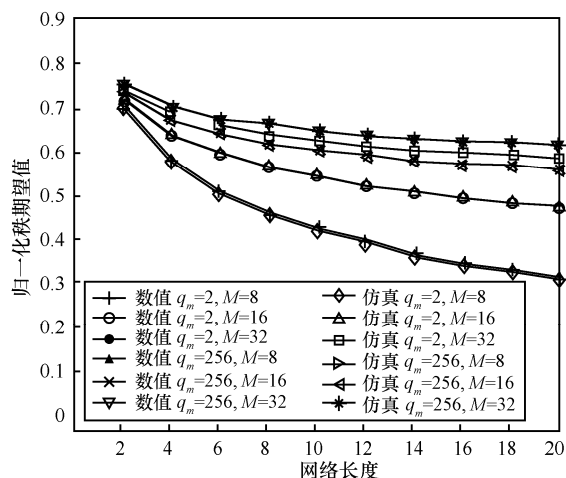


图 3 $k=1$ 时基于系统重编码的分批稀疏码归一化秩期望

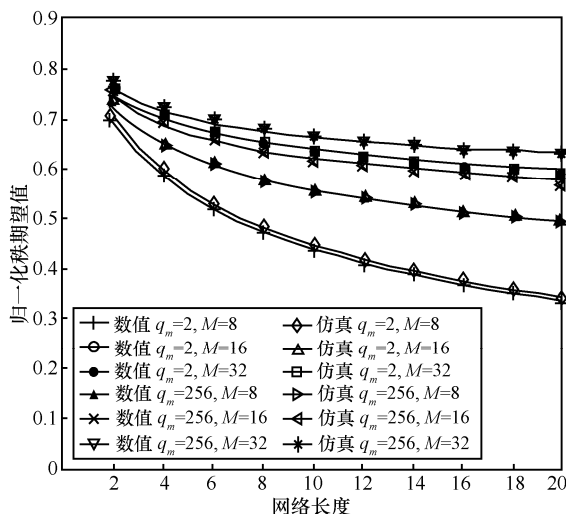


图 4 $k=2$ 时基于系统重编码的分批稀疏码归一化秩期望

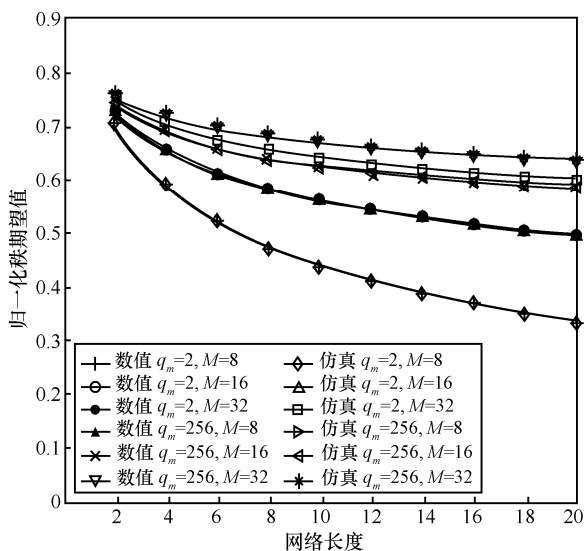
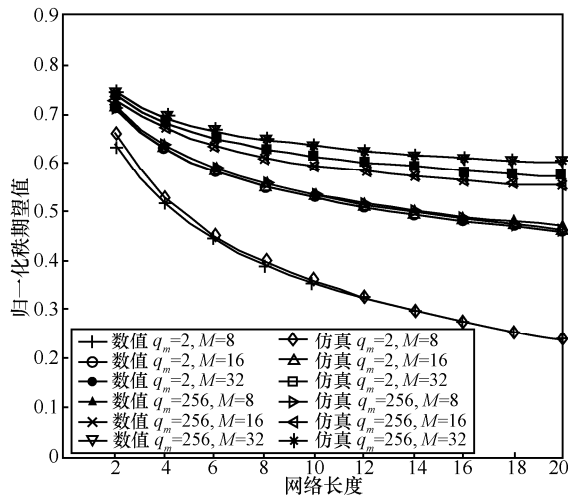
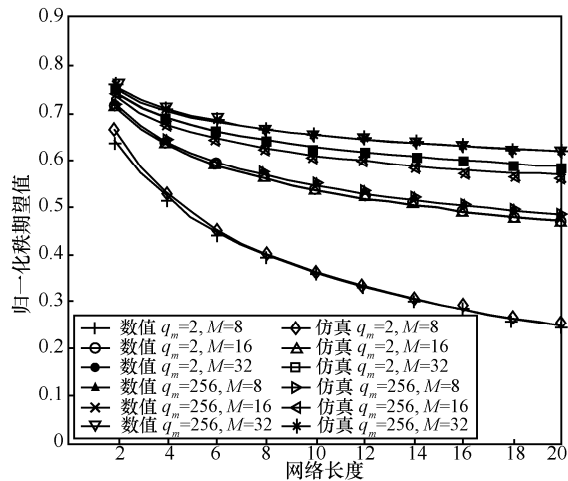
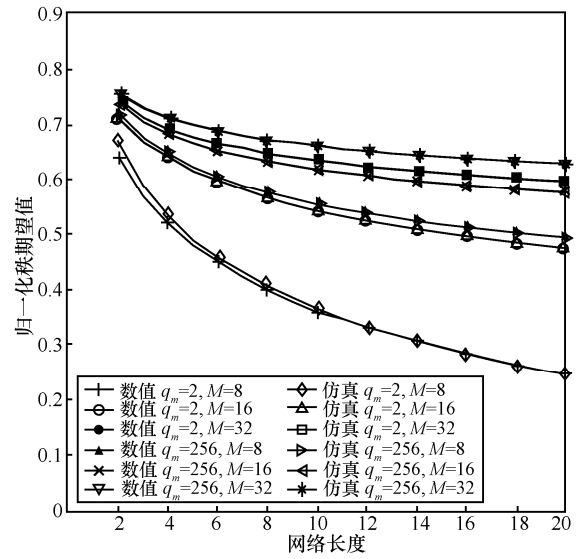
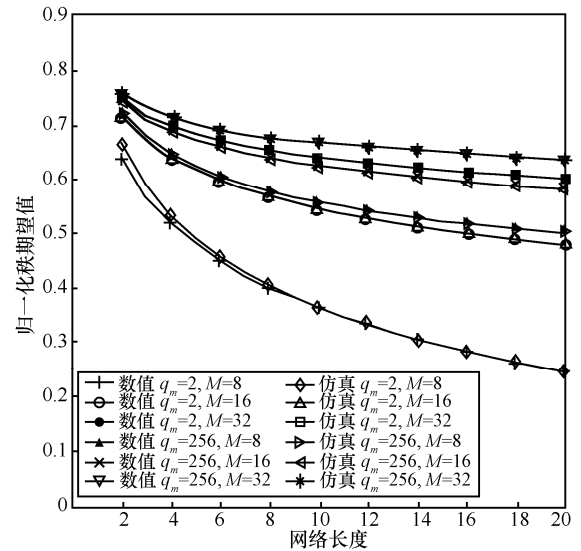


图 5 $k=3$ 时基于系统重编码的分批稀疏码归一化秩期望



为了比较时变信道下基于系统重编码与基于 RLNC 重编码的归一化秩期望, 图 6~图 9 给出了当有限区间正态分布阶数 $k = 0, 1, 2$ 和 3 时基于 RLNC 重编码的分批稀疏码归一化秩期望, 其中数值计算的结果根据式 (19) 计算所得, 其结果与蒙特卡洛仿真相吻合。此外, 对比图 2 与图 6、图 3 与图 7、图 4 与图 8、图 5 与图 9, 可以发现当 q_m 、 M 和 L 较小时, 基于系统重编码的分批稀疏码比基于 RLNC 重编码的分批稀疏码具有更好的归一化秩期望; 当基域 q_m 较大时, 基于系统重编码的分批稀疏码与基于 RLNC 重编码的分批稀疏码具有近乎一致的性能。因此, 若基域 q_m 较小时, 使用系统重编码来传输数据具有更好的性能。

图 6 $k=0$ 时基于 RLNC 重编码的分批稀疏码归一化秩期望图 7 $k=1$ 时基于 RLNC 重编码的分批稀疏码归一化秩期望图 8 $k=2$ 时基于 RLNC 重编码的分批稀疏码归一化秩期望图 9 $k=3$ 时基于 RLNC 重编码的分批稀疏码归一化秩期望

4 结束语

本文分析了在时变信道下基于系统重编码的分批稀疏码秩分布, 通过将信道链路上的丢包率建模成随机变量, 得到了时变信道下秩分布的通用表达式, 同时, 本文进一步研究了链路丢包率服从有限区间正态分布时的秩分布且阶数 k 为任意值时, RLNC 和系统重编码的归一化秩期望的通用闭合解。随后通过蒙特卡洛仿真, 验证了该闭合解的正确性与通用性。本文的研究均基于多

跳线性网络模型,在实际生产生活中,无线网络的模型会更加多样。因此,对于更贴近实际生活的诸多非线性网络环境下,分批稀疏码在时变信道下的秩分布也同样具有研究价值,后续可进一步进行理论分析,探讨线性网络下的诸多结论和性质是否同样适用于其他非线性网络模型。

参考文献:

- [1] AHLWEDE R, CAI N, LI S Y R, et al. Network information flow[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(4): 1204-1216.
- [2] HO T, MEDARD M, KOETTER R, et al. A random linear network coding approach to multicast[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(10): 4413-4430.
- [3] YANG S H, YEUNG R W. Batched sparse codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(9): 5322-5346.
- [4] HO T, KOETTER R, MEDARD M, et al. The benefits of coding over routing in a randomized setting[C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory, 2003. Piscataway: IEEE Press, 2003: 442.
- [5] SHRADER B, EPHREMIDES A. A queueing model for random linear coding[C]//Proceedings of MILCOM 2007 - IEEE Military Communications Conference. Piscataway: IEEE Press, 2007: 1-7.
- [6] YUE J, XIAO M, PANG Z B. Distributed BATS-based schemes for uplink of industrial Internet of Things[C]//Proceedings of ICC 2019 - 2019 IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE Press, 2019: 1-6.
- [7] YANG S H, YEUNG R W. BATS codes: theory and practice[J]. Synthesis Lectures on Communication Networks, 2017, 10(2): 1-226.
- [8] 杨旭, 肖子玉, 张明, 等. 5G 核心网面向 3GPP R16 演进关键技术及引入策略[J]. 电信科学, 2021, 37(6): 150-159.
YANG X, XIAO Z Y, ZHANG M, et al. Key technologies and introduction strategies for 3GPP R16 oriented evolution of 5G core network[J]. Telecommunications Science, 2021, 37(6): 150-159.
- [9] YANG S H, YEUNG R W, CHEUNG J H F, et al. BATS: Network coding in action[C]//Proceedings of 2014 52nd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). Piscataway: IEEE Press, 2014: 1204-1211.
- [10] YIN H H F, YANG S H, ZHOU Q Q, et al. Adaptive recoding for BATS codes[C]//Proceedings of 2016 IEEE International Symposium on Information Theory. Piscataway: IEEE Press, 2016: 2349-2353.
- [11] XIAO M, SKOGLUND M. On network coding with finite channel state information[C]//Proceedings of 2011 8th International Symposium on Wireless Communication Systems. Piscataway: IEEE Press, 2011: 487-491.
- [12] XU X L, GUAN Y L, ZENG Y, et al. Quasi-universal BATS code[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2017, 66(4): 3497-3501.
- [13] FEIZI S, LUCANI D E, SØRENSEN C W, et al. Tunable sparse network coding for multicast networks[C]//Proceedings of 2014 International Symposium on Network Coding (NetCod). Piscataway: IEEE Press, 2014: 1-6.
- [14] LI Y, SOLJANIN E, SPASOJEVIC P. Effects of the generation size and overlap on throughput and complexity in randomized linear network coding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(2): 1111-1123.
- [15] WANG M A, LI B C. How practical is network coding?[C]//Proceedings of 2006 14th IEEE International Workshop on Quality of Service. Piscataway: IEEE Press, 2006: 274-278.
- [16] MAHDAVIANI K, ARDAKANI M, BAGHERI H, et al. Gamma Codes: a low-overhead linear-complexity network coding solution[C]//Proceedings of 2012 International Symposium on Network Coding (NetCod). Piscataway: IEEE Press, 2012: 125-130.
- [17] SEHAT H, PAHLEVANI P. An analytical model for rank distribution in sparse network coding[J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(4): 556-559.
- [18] LI X L, MOW W H, TSANG F L. Singularity probability analysis for sparse random linear network coding[C]//Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE Press, 2011: 1-5.
- [19] LI X L, MOW W H, TSANG F L. Rank distribution analysis for sparse random linear network coding[C]//Proceedings of 2011 International Symposium on Networking Coding. Piscataway: IEEE Press, 2011: 1-6.
- [20] TANG L, LIU H, YANG L, et al. Analysis for rank distribution of BATS codes under time-variant channels[C]//Proceedings of 2020 IEEE 91st Vehicular Technology Conference. Piscataway: IEEE Press, 2020: 1-5.

[作者简介]



王士恒(1998—),男,西南交通大学硕士生,主要研究方向为喷泉码、网络编码。



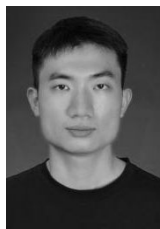
刘恒（1983- ），男，博士，西南交通大学讲师、硕士生导师，主要研究方向为移动通信和工程信息化。



苏金领（1996- ），男，西南交通大学硕士生，主要研究方向为无线通信。



唐林（1994- ），男，现就职于中国电子科技集团第三十研究所，主要研究方向为网络编码。



张瑞琦（2000- ），男，西南交通大学硕士生，主要研究方向为无线通信。